

Το 1798, έξι χρόνια μετά την μυστική ανακάλυψη του Gauss, ο Adrian Marie Legendre ανακοινώνει τη πειραματική ανακάλυψη της σχέσης ανάμεσα στους πρώτους και τους λογάριθμους. Η διχογνωμία σχετικά με τη πατρότητα της πρώτης ανακάλυψης της σχέσης μεταξύ πρώτων και λογάριθμων οδήγησε σε μία οξυτάτη αντιπαράθεση. Ο Legendre πάντως ήταν αυτός που δημοσίευσε πρώτος τις παρατηρήσεις του το 1808 στο ‘Theories des Nombres’.

Συμφώνα με τον Legendre έχουμε

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N - 1,08366}$$

Ο τύπος του Legendre φαινόταν ότι έδινε καλύτερη προσέγγιση του πλήθους των πρώτων. Θα λέγαμε ότι είναι μία ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή του τύπου του Gauss που ταίριαζε καλύτερα στα ευρήματα της εποχής σχετικά με τους πρώτους αριθμούς. Σε μία επιστολή του προς τον Johann Encke που έχει ημερομηνία 24 Δεκεμβρίου 1849, υπάρχουν όλες οι ενδείξεις ότι η σχετική ανακάλυψη του Gauss είχε προηγηθεί χρονικά του Legendre. Σε αυτή την επιστολή, ο Gauss, εξετάζει κριτικά τον περίεργο αριθμό 1,08366 του Legendre για τον οποίο γράφει ότι πράγματι προσδίδει μεγαλύτερη ακρίβεια στη δική του προσέγγιση για το πλήθος των πρώτων για σχετικά μικρές τιμές του N. Εντούτοις, εκφράζει το φόβο ότι πιθανώς να μη συμβαίνει το ίδιο για μεγαλύτερες τιμές. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο Gauss δεν εμπιστευόταν τα έτοιμα αποτελέσματα που έδιναν οι τότε γνωστοί πίνακες πρώτων αλλά έφτιαχνε τους δικούς του. Στην ίδια επιστολή αναφέρει ότι συχνά αφιέρωνε ένα τέταρτο της ώρας για να βρει τους πρώτους σε μία χιλιάδα αριθμών ενώ δίνει και διορθώσεις στους πίνακες του Lambert.

Με τη πάροδο των χρόνων κατασκευάστηκαν καλύτεροι πίνακες πρώτων οπότε οι τύποι των Gauss και Legendre μπορούσαν να συναγωνιστούν σε μεγαλύτερο δείγμα πρώτων. Ο τύπος του Gauss κέρδισε. Ο αντιαισθητικός αριθμός 1,08366 του Legendre καταρρίφθηκε. Ήταν βαλμένος για να διορθώνει το σφάλμα στην εκτίμηση του Gauss για μικρά σχετικά N αλλά έκανε τα πράγματα πολύ χειρότερα στη συνέχεια σε μεγαλύτερα N. Η θεωρητική ανάλυση αλλά και η διαίσθηση του Gauss είχε νικήσει την προσπάθεια του Legendre να τροποποιήσει τον τύπο ώστε να ταιριάζει στα διαθέσιμα στοιχεία. Ο Gauss όμως δε σταμάτησε εκεί.