Σε ένα γράμμα του στον Goldbach το 1752, ο Euler, ανακοινώνει ότι γνωρίζει μόνο εφτά τέλειους αριθμούς της μορφής $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$, συγκεκριμένα για $\nu = 2,3,5,7,13,17,19$ ενώ δηλώνει αβέβαιος για $\nu = 31$. Το 1772 όμως, σε ένα γράμμα του στον D.Bernoulli δηλώνει πως έχει επαληθεύσει ότι ο $2^{31}-1$ είναι πρώτος δίνοντας ουσιαστικά τον όγδοο τέλειο. Επιπλέον ο Euler έδωσε τους μικρότερους παράγοντες των $2^{\nu}-1$ για $\nu = 37, 43, 29$ και 73 αποκλείοντάς τους από τους πρώτους αριθμούς και γλιτώνοντας από μεγάλο υπολογιστικό κόπο τους μεταγενέστερους μαθηματικούς και ερευνητές. Η πιο σημαντική προσφορά του όμως στο κυνήγι των τέλειων ήταν η απόδειξη της εξής πρότασης:

Οι μόνοι άρτιοι τέλειοι αριθμοί είναι της μορφής $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ όπου ο $2^{\nu}-1$ είναι πρώτος.

Απόδειξη

Έστω $\sigma(\nu)$ η συνάρτηση που ορίζεται ως το άθροισμα όλων των διαιρετών του ν συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου. Άρα ο ν θα είναι τέλειος αν και μόνο αν $\sigma(\nu) = 2\nu$. Εύκολα δείχνουμε ότι αν ο p είναι πρώτος τότε $\sigma(p^{a}) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$ καθώς επίσης και ότι $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$ όπου α, β σχετικά πρώτοι.

Έστω τώρα ν ένας άρτιος και τέλειος αριθμός. Τότε $\nu = 2^{\alpha}m$ με $\alpha > 0$ και m περιττό, και έτσι $\sigma(\nu) = \sigma(2^{\alpha})\sigma(m) = (2^{\alpha+1}-1)\sigma(m)$. Από την άλλη, αφού ο ν είναι τέλειος θα έχουμε $\sigma(\nu) = 2\nu = 2^{\alpha+1}m$. Εξισώνοντας παίρνουμε ότι

$$(2^{\alpha+1}-1)\sigma(m) = 2^{\alpha+1}m$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $2^{\alpha+1}-1$ πρέπει να είναι διαιρέτης του m αφού δεν έχει κοινό παράγοντα με τον $2^{\alpha+1}$. Άρα $m = (2^{\alpha+1}-1)l$ για κάποιον ακέραιο l. Με αντικατάσταση στη παραπάνω σχέση και με απαλοιφή του $2^{\alpha+1}-1$ προκύπτει $ότι\ \sigma(m) = 2^{\alpha+1}l = l + (2^{\alpha+1}-1)l = l + m$. Επειδή οι l και m είναι και οι δύο διαιρέτες του m και αθροίζονται στο $\sigma(m)$ πρέπει να είναι οι μόνοι διαιρέτες του m. Επειδή όμως και ο 1 είναι διαιρέτης του m, πρέπει να έχουμε $l = 1$και άρα m=$2^{\alpha+1}-1$ και πρώτος.

Μετά από αυτό το Θεώρημα αν θέλουμε να αναζητήσουμε περιττούς τέλειους πρέπει να ψάχνουμε αποκλειστικά σε αριθμούς της μορφής $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ όπου οι $\nu, 2^{\nu}-1$ είναι πρώτοι.