

A.Cataldi, ένας μαθηματικός από τη Μπολόνια απέδειξε ότι ο έκτος τέλειος είναι ο 8.589.869.056 και ο έβδομος ο 137.438.691.328 διαψεύδοντας αρκετούς που πίστευαν ότι τα τελευταία ψηφία των διαδοχικών τέλειων αριθμών εναλλάσσονται μεταξύ 6 και 8. Επίσης, αφού σημείωσε ότι ο $2^n - 1$ είναι σύνθετος αν ο n είναι σύνθετος, διατύπωσε την εικασία ότι οι αριθμοί αυτής της μορφής είναι πρώτοι για $n = 12, 17, 19, 23, 29$ και 37. Ο P.Bungus δίνει (1584) έναν πίνακα με 28 τέλειους αριθμούς. Αργότερα ο Fermat δηλώνει τη πίστη του ότι οι τέλειοι αριθμοί είναι πιο σπάνιοι από όσο γενικά πίστευαν οι σύγχρονοί του. Δηλώνει ότι δεν υπάρχουν τέλειοι με 20 ή 21 ψηφία και γενικά δεν υπάρχει ένας τέλειος αριθμός ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 10 όπως είχε αρχίσει να καθιερώνεται σαν άποψη. Το 1640 στέλνει ένα γράμμα στον Marin Mersenne, έναν Γάλλο μοναχό που εκτός από τα θρησκευτικά του καθήκοντα ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τα Μαθηματικά και τη Μουσική και με τον οποίο αλληλογραφούσε συχνά κοινοποιώντας τις μαθηματικές του ανακαλύψεις. Στο γράμμα αυτό ο Fermat ανέφερε ότι απέδειξε τρεις προτάσεις που αποκάλεσε τη βάση της ανακάλυψης τέλειων αριθμών. Αν ο n είναι σύνθετος τότε ο $2^n - 1$ είναι σύνθετος, αν ο n είναι πρώτος τότε ο $2^n - 2$ διαιρείται από το $2n$ και ότι ο $2^n - 1$ διαιρείται μόνο από πρώτους της μορφής $2kn + 1$. Την ίδια περίοδο δείχνει ότι ο 47 είναι παράγοντας του $2^{23} - 1$ και ο 223 του $2^{37} - 1$ καταρρίπτοντας την εικασία του A.Cataldi. Ο M.Mersenne ασχολήθηκε επίσης εκτενώς με τους αριθμούς της μορφής $2^n - 1$. Είναι σίγουρα σύνθετοι αν ο n είναι σύνθετος αλλά αν ο n είναι πρώτος είναι πιθανό να είναι πρώτοι. Οι πρώτοι αυτής της μορφής είναι μία ειδική κατηγορία πρώτων αριθμών που ονομάζονται σήμερα πρώτοι του Mersenne. Το 1644 ανακοινώσε ότι μόνο 8 από τους 28 του P.Bungus είναι πράγματι τέλειοι και διατύπωσε την εικασία ότι ο $2^n - 1$ είναι πρώτος αν και μόνο αν ο n είναι ένας από τους 2,3,5,13,19,31,67,127 και 257. Έκανε λάθος για $n = 61, 67, 89, 109$ και 257 αλλά η διαιώνιση του ονόματός του εύκολα δικαιολογείται αν αναλογιστούμε ότι σωστά χαρακτήρισε ως πρώτους ή μη τους αριθμούς της μορφής $2^n - 1$ με λιγότερα από 19 ψηφία. Μεγάλη εντύπωση προκαλεί η εικασία του χαρακτηρισμού ως πρώτων για τους αριθμούς $2^{127} - 1$ και $2^{257} - 1$. Ο πρώτος έχει 39 ψηφία και ο δεύτερος 77. Η επιβεβαίωση για τον πρώτο από τους δύο ήρθε περίπου 250 χρόνια αργότερα ενώ η διάψευση για το δεύτερο πήρε ακόμα περισσότερο. Για να αναδείξουμε τη σημασία των πρώτων του Mersenne αρκεί να αναφέρουμε ότι σήμερα η εύρεση πρώτων αριθμών περνάει τις περισσότερες φορές μέσα από την εύρεση πρώτων αυτού του είδους.