

συμπεράσματα. Η εμπειρία έχει δείξει ότι είναι αρκετά επίπονο να αναγνώσουμε σήμερα ένα κείμενο 2.300 χρονών. Πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με τις ερμηνείες που δίνουμε. Ο τρόπος που θεωρούμε σήμερα τους αριθμούς και τα σημεία, τα δομικά στοιχεία της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας δηλαδή, είναι σίγουρα διαφορετικός από τον τρόπο που τα θεωρούσε ο Ευκλείδης όταν συνέλεγε τα 'Στοιχεία'. Είναι δύσκολο να αντιληφθούμε την έννοια της αναλογίας χωρίς να τη ταυτίζουμε με την ισότητα κλασμάτων, αυτό όμως πρέπει να κάνουμε αν θέλουμε να κατανοήσουμε πλήρως τη Θεωρία Αριθμών του βιβλίου VII.

Ανεξάρτητα από το ποια ερμηνεία του ορισμού 21 θεωρούμε, καταλήγουμε στο ότι ο Ευκλείδης χρειαζόταν τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο για να φτάσει στη μοναδικότητα της παραγοντοποίησης. Στην αποδεικτική διαδικασία των 'Στοιχείων' αυτό είναι κάθε άλλο παρά προφανές. Ο Ευκλείδης φαίνεται να αποδεικνύει τη μία πρόταση μετά την άλλη και να φτάνει στο λήμμα που με τη σειρά του οδηγεί στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, χωρίς να κάνει χρήση του δικού του αλγόριθμου. Υπάρχουν όμως κενά στη συλλογιστική του που η ανάλυση παραπάνω έδειξε ότι, με όποιον τρόπο και αν προσπαθήσαμε να τα συμπληρώσουμε, επικαλεστήκαμε το πόρισμα του Ευκλείδειου Αλγόριθμου. Ο Ευκλείδης γνωρίζει ότι όλα τα συμπεράσματα στο βιβλίο αυτό στηρίζονται κατά ουσιαστικό τρόπο στον Ευκλείδειο Αλγόριθμο ή το πόρισμά του και γι αυτό το επιλεγεί ως εισαγωγικό στις προτάσεις του βιβλίου VII.

Η θεωρία των αναλογιών που αναπτύσσει ο Ευκλείδης στο βιβλίο VII είναι σαφώς πιο απλή από αυτή του βιβλίου V. Ο ορισμός της αναλογίας στο βιβλίο V είναι μεταγενέστερος και παρουσιάζεται σαν τελειότερος από αυτόν στο βιβλίο VII.<sup>2</sup> Πρόκειται βέβαια για αναλογία μεγεθών και είναι σαφές ότι ο ορισμός του βιβλίου V εξυπηρετεί καλύτερα τις ανάγκες του βιβλίου αυτού που έχει να κάνει και με ασύμμετρα μεγέθη σε αντίθεση με το βιβλίο VII που έχει να κάνει μόνο με σύμμετρους αριθμούς. Παρόλα αυτά, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο καινούριος ορισμός. Γιατί ο Ευκλείδης δεν το χρησιμοποίησε; Ο Van der Waerden (2007) αναφέρει ότι ο Ευκλείδης κράτησε τον παλιό ορισμό διότι αλλιώς θα ήταν υποχρεωμένος να αναπλάσει ολόκληρο το βιβλίο, προκειμένου να το προσαρμόσει στο νέο ορισμό. Η ανάλυση παραπάνω έδειξε ότι μπορεί και να μην ήταν αυτός ο λόγος. Ο ορισμός που χρησιμοποιεί στο βιβλίο VII ο Ευκλείδης είναι ακριβώς αυτό που χρειάζεται για να φτάσει στα συμπεράσματά του. Ούτε

<sup>2</sup> Ο ορισμός της αναλογίας στο βιβλίο V θεωρήθηκε και αυτός αρκετά ασαφής έως προβληματικός για πολλά χρόνια μέχρι που έγινε αντιληπτό ότι έχει μεγάλες ομοιότητες με τη σύγχρονη άποψη για τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και τις τομές Dedekind.