

2.1 Ένας δρόμος προς το άπειρο από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη μέχρι τα fractal

‘εί πολλά ἐστίν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττωνα. εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστίν ὅσα ἐστὶ, πεπερασμένα ἂν εἴη. εἰ πολλά ἐστίν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστὶ, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξὺ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστὶ’. καὶ οὕτως μὲν τὸ κατὰ τὸ πλῆθος ἄπειρον ἐκ τῆς διχοτομίας ἔδειξε. Δηλαδή "Ἄν υπάρχουν πολλά, τότε αναγκαία είναι όσα είναι, οὔτε περισσότερα οὔτε λιγότερα. Ἄν όμως είναι όσα είναι, τότε είναι πεπερασμένα. Ἄν υπάρχουν πολλά, τότε τα πράγματα που υπάρχουν είναι άπειρα, γιατί πάντα υπάρχουν και ἄλλα πράγματα ανάμεσα στα όσα υπάρχουν, και ανάμεσα σ’ εκείνα πάλι ἄλλα. Ἐπομένως, τα πράγματα που υπάρχουν είναι άπειρα." οὐ μὴν ἄλλὰ καὶ Ξενοφάνης καὶ Ζ. ὁ 'Ελεάτης καὶ Δημόκριτος κατ' αὐτοὺς σκεπτικοὶ τυγχάνουσιν ... Ζ. δὲ τὴν κίνησιν ἀναιρεῖ λέγων 'τὸ κινούμενον οὔτ' ἐν ᾧ ἔστι τόπωι κινεῖται οὔτ' ἐν ᾧ μὴ ἔστι'. ΖΗΝΩΝΟΣ ΠΕΡΙ ΦΥΣΕΩΣ SIMPL. Phys. 140, 34 p, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρά μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι'. ἐν ᾧ δεικνυσὶν ὅτι 'εἰ πολλά ἐστὶ, καὶ μεγάλα ἐστὶ καὶ μικρά· μεγάλα μὲν ὥστε ἄπειρα τὸ μέγεθος εἶναι, μικρά δὲ οὕτως ὥστε μὴθὲν ἔχειν μέγεθος' [B 1]. ἐν δὴ τούτῳ δεικνυσὶν, ὅτι οὐ μῆτε μέγεθος μῆτε πάχος μῆτε ὄγκος μῆθεις ἐστίν, οὐδ' ἂν εἴη τοῦτο. TLG (ZENO fragmenta)

2500 χρόνια περίπου πριν ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας διατύπωσε τον ισχυρισμό που έμεινε γνωστός στην ιστορία σαν Παράδοξο του Ζήνωνα . Όπως γράφει ο Δ. Αναπολιτάνος στο βιβλίο του «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» (σελίδα 59)ο Ζήνωνας έχοντας σαν πρόθεση του την υπεράσπιση του Παρμενίδειου μονιστικού φιλοσοφικού συστήματος από τις επιθέσεις των πλουραλιστών της εποχής παρήγαγε μια σειρά από παράδοξα που συνδέονται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς. ἔστι δ' οὗτος ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θεόν ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀνογκάζον ἐλθεῖν τὸ διώκον, ὅθεν ὤρμησε τὸ φεύγον, ὥστ' αἰεὶ τι πρόχειν ἀνογκάζον τὸ βραδύτερον. ἔστι δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῶι διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῶι διακεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβάνομενον

Περιγράφουμε ένα από τα παράδοξα :Ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας πρόκειται να διανύσει την απόσταση AB . Για να τη διανύσει θα πρέπει να διανύσει την απόσταση AA₁=AB/2 στην συνέχεια την A₁A₂=AB/4 , την A₂A₃=AB/8 και ούτω καθεξής Σύμφωνα με τον Ζήνωνα μια τέτοια διαδικασία είναι αδύνατη , γιατί για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση AB θα πρέπει να περάσει από ένα άπειρο πλήθος σημείων , δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία μεταβάσεων . Οι μαθηματικοί φιλόσοφοι της εποχής είχαν αναπτύξει την ιδέα άπειρων αλλά συνεχώς ελαττωμένων διαστημάτων.

Μια περίπτωση της έννοιας του ορίου βρίσκεται στην περίπτωση των **πλευρικών** και **διαμετρικών** αριθμών .Για να σχηματίσουμε την πλευρά και την διάμετρο του μεγαλύτερου τετραγώνου αν α είναι πλευρά και δ η διάμετρος του πρώτου τετραγώνου εργαζόμαστε ως εξής :

Αριθμοί πλευρικοί	Αριθμοί διαμετρικοί
α	δ
α + δ = α ₁	2 α + δ =δ ₁
α ₁ +δ ₁ = α ₂	2 α ₁ + δ ₁ =δ ₂
.....

Οι περιττής τάξεως λόγοι (διαμέτρου προς πλευρά) αυξάνονται συνεχώς και οι άρτιοι συνεχώς μειώνονται .Έχουμε δηλαδή δύο ακολουθίες αριθμών που όταν το n τείνει στο άπειρο αυτές συμπίπτουν με το √2 .Βέβαια ο Θεών δεν αναφέρεται ούτε σε φράγματα ακολουθίας , ούτε περί εγκιβωτισμού της √2 .Οι σύγχρονοι ερμηνευτές αναπτύσσουν τους λόγους των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών δια των συνεχών κλασμάτων :