

ποσοδεικτών, ώστε να γίνει εφικτός ο λογισμός επί των δεσμευμένων μεταβλητών τους, χωρίς την παράβλεψη κάποιας «εξάρτησης» που μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα. Αυτά τα ζητήματα, όμως, θα αναπτυχθούν διεξοδικότερα σε επόμενη παράγραφο της παρούσης εργασίας.

Ανάλογη είναι και η πολυπλοκότητα του ορισμού μη πεπερασμένου ορίου της $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όπου, για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

ή, των ορίων στο άπειρο¹⁴, όπου, για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \in A (x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Σε αυτήν την τελευταία κατηγορία ανήκει, ουσιαστικά, και ο ορισμός του ορίου¹⁵ ακολουθίας, σύμφωνα με τον οποίο, για την ακολουθία (a_n) με όριο το $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^* (n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$$

Εκτός των ορισμών των ορίων, άλλες, πρωτοεμφανιζόμενες στην ύλη της Γ' Λυκείου, έννοιες που εμπλέκουν στον ορισμό τους ποσοδείκτες είναι αυτές των τοπικών ακροτάτων. Εξάλλου, και η έννοια του ορίου, αλλά και η ειδικότερη της παραγώγου, είναι «τοπικές» έννοιες. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, τον ορισμό του τοπικού μεγίστου:

$$\exists x_0 \in A \exists \delta > 0 \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) [f(x) \leq f(x_0)]$$

Εάν ο υπαρκτικός ποσοδείκτης, που δεσμεύει τη μεταβλητή δ στον προηγούμενο ορισμό, αντικατασταθεί από τον καθολικό ποσοδείκτη, τότε θα προκύψει ο γνώριμος από την Α' Λυκείου ορισμός του ολικού μεγίστου. Πάντως, η αντιπαράβολη των δύο ορισμών, η επισήμανση των ομοιοτήτων αλλά και των διαφορών τους, όπως και το ποιος από τους δύο συνεπάγεται τον άλλον, πρέπει ασφαλώς να συγκαταλέγονται μεταξύ των ζητημάτων της σχετικής συζήτησης.

Τελειώνοντας, να αναφέρουμε ότι η παρουσία ποσοδεικτών σε όλα, σχεδόν, τα θεωρήματα της Ανάλυσης είναι δεδομένη. Πολλές βέβαια φορές, αυτό συμβαίνει με τετριμμένο τρόπο, αφορώντας απλώς την «καθολική» εφαρμογή των θεωρημάτων. Άλλες πάλι φορές, μπορεί να είναι πιο ουσιαστική. Αναφέρουμε, για παράδειγμα, το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής, από το κεφάλαιο της Συνέχειας Συναρτήσεων. Και τα δύο εφαρμόζονται για κάθε πραγματικούς αριθμούς a, β και για κάθε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$. Στο μεν πρώτο (και για $f(a) \neq f(\beta)$), το συμπέρασμα είναι ότι:

$$\forall \eta \in (f(a), f(\beta)) \exists \xi \in (a, \beta) [f(\xi) = \eta],$$

¹⁴μάλιστα, στην περίπτωση των ορίων στο άπειρο, το σχολικό βιβλίο, ούτε καν χάριν πληρότητας, δεν αναφέρει τους (6 συνολικά: για κάθε μια από τις περιπτώσεις $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$, το όριο να είναι είτε $l \in \mathbb{R}$, είτε $+\infty$, είτε $-\infty$) σχετικούς ορισμούς, όπως έκανε για τις (συνολικά 3) περιπτώσεις των ορίων στο $x_0 \in \mathbb{R}$, προσεγγίζοντας τις αντίστοιχες έννοιες μόνον γραφικά. Αντίθετα, τα προηγούμενα σχολικά βιβλία ανέφεραν όλους τους ορισμούς.

¹⁵στη σχετική παράγραφο του σχολικού βιβλίου, η μόνη περίπτωση που αναφέρεται είναι αυτή του πεπερασμένου ορίου ακολουθίας. Τα άπειρα όρια δεν αναφέρονται ούτε καν γραφικά.