

που κάποτε αποτέλεσαν πρόκληση για ολόκληρες γενιές μαθηματικών. Εξάλλου, οι παράλληλοι όροι *epistemic subject* και *collective epistemic subject*, που χρησιμοποιούνται από μερικούς ερευνητές για να διακρίνουν μεταξύ των ατόμων που μαθαίνουν και της κοινότητας των δημιουργών της γνώσης, εκφράζουν την ευρέως διαδεδομένη πίστη σε αυτές τις ομοιότητες (Sfard, 1995). Στο παρόν κεφάλαιο, λοιπόν, θα εξετάσθει η ανάπτυξη της έννοιας των ποσοδεικτών, τόσο από ιστορική όσο και από ψυχολογική πλευρά.

1.1 Μικρή ιστορική αναδρομή στην ανάπτυξη των ποσοδεικτών

Όλες οι γνωστές ανθρώπινες γλώσσες κάνουν χρήση των ποσοδεικτών: ακόμη και εκείνες που δε διαθέτουν ένα πλήρως αναπτυγμένο αριθμητικό σύστημα. Στα Μαθηματικά, επίσης, η ανάγκη χρήσης τους είναι, τουλάχιστον όσον αφορά στις περισσότερες μη τετριμμένες περιπτώσεις, αδήριτη. Αλλά και η προεξάρχουσα θέση τους στη Λογική, στον τομέα, δηλαδή, της ανθρώπινης δραστηριότητας που σχετίζεται με τη διαμόρφωση των αρχών του έγκυρου συμπερασμού και την εν γένει οροθέτηση της έννοιας της εγκυρότητας, είναι αδιαμφισβήτητη.

Ο Αριστοτέλης υπήρξε ο πρώτος διανοητής που επινόησε ένα λογικό σύστημα, περίπου πριν από δύο χιλιάδες τετρακόσια χρόνια, το οποίο και παρουσιάζεται σε έξι πραγματείες του γνωστές ως *Όργανον* – Κατηγορίαι, Περί Ερμηνείας, Αναλυτικά Πρότερα, Αναλυτικά Ύστερα, Τοπικά, Περί των Σοφιστικών Ελέγχων. Εκεί πραγματεύεται και τους περίφημους συλλογισμούς του, στους οποίους φαίνεται ότι κυριαρχεί το νόημα των «ποσοδεικτικών» λέξεων *όλα*, *μερικά*, *κανένα*, *όχι όλα*.³ Ένας συλλογισμός έχει, σύμφωνα με τη θεώρηση του Αριστοτέλη, τη μορφή:⁴

$$\frac{Q_1 AB}{\frac{Q_2 B\Gamma}{Q_3 A\Gamma}}$$

όπου καθένα από τα Q_1, Q_2, Q_3 είναι κάποια από τις προαναφερθείσες τέσσερις ποσοδεικτικές εκφράσεις. Η μορφή των συλλογισμών ήταν τέτοια ώστε στις δύο προκειμένες να σχετίζονται οι δύο όροι του συμπεράσματος (οι A και Γ , το μείζον

³Καθεμιά από τις τέσσερις αυτές ποσοδεικτικές εκφράσεις αντιπροσωπεύει και μια δυαδική σχέση μεταξύ συνόλων, στο βαθμό που οι «ιδιότητες» στις οποίες αναφέρονται αντιμετωπίζονται «εκτατικά». Εκτατική ήταν και η αντίληψη του Αριστοτέλη για τις ιδιότητες στις οποίες αναφερόντουσαν οι εν λόγω ποσοδεικτικές λέξεις. Έτσι, για αυθαίρετα σύνολα A, B :

$$\begin{aligned} \text{όλα}(A, B) &\iff A \subseteq B \\ \text{μερικά}(A, B) &\iff A \cap B \neq \emptyset \\ \text{κανένα}(A, B) &\iff A \cap B = \emptyset \\ \text{όχι όλα}(A, B) &\iff A - B \neq \emptyset \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι ο Αριστοτέλης δεν επέτρεπε το κενό σύνολο. Έτσι, η πρόταση «όλα τα A είναι B » συνεπάγεται, σύμφωνα με τη θεώρησή του, την πρόταση «μερικά A είναι B », γεγονός που εδώ παραβλέπεται.

⁴Για την ακρίβεια, αυτό που αναφέρεται εδώ είναι το αποκαλούμενο *πρώτο σχήμα*. Το δεύτερο σχήμα έχει τη μορφή $\frac{Q_1 MN}{\frac{Q_2 M\Xi}{Q_3 N\Xi}}$ και το τρίτο σχήμα τη μορφή $\frac{Q_1 \Pi\Sigma}{\frac{Q_2 P\Sigma}{Q_3 \Pi P}}$. Αξίζει, επίσης, να επισημανθεί η χρήση διαδοχικών γραμμάτων ως μεταβλητών από τον Αριστοτέλη.