απεικόνιση **x**) με σκοπό η **x** να αποτελέσει ένα σύστημα συν/νων μιας (κανονικής) επιφάνειας (με την εικόνα του να αποτελεί μια περιοχή συν/νων γύρω από ένα σημείο της), εργαζόμαστε με βάση την πρόταση:

Πρόταση

Ας είναι M *μια κανονική επιφάνεια και* **P** *ένα σημείο της. Έστω* $\mathbf{x}: U\subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *μια απεικόνιση έτσι ώστε* $\mathbf{P}\in \mathbf{x}(U)\subset M$ *και έστω επίσης ότι ισχύουν οι συνθήκες* I *και* II *του ορισμού της κανονικής επιφάνειας που δόθηκε παραπάνω. Αν η* **x** *είναι 1-1 τότε η* $\mathbf{x}^{-1}$ *είναι συνεχής και το* **x** *είναι ένα σύστημα συν/νων γύρω από το* **P**.

Θα θέλαμε η εικόνα ενός συστήματος συν/νων (ή περιοχή συν/νων επί της επιφάνειας) να μπορεί να καλύπτει ολόκληρη την προς μελέτη επιφάνεια. Αυτό όμως δεν είναι συνήθως δυνατό. Έτσι, οι παράμετροι δύο συστημάτων συντεταγμένων, που έχουν την ίδια εικόνα, δε συνδέονται απαραίτητα με μια 1-1 μεταξύ τους απεικόνιση. Στην καλύτερη περίπτωση θα μείνουν «ακάλυπτα» πεπερασμένα στο πλήθος σημεία (κάτι το οποίο θα είναι και αυτό που εμείς θα αντιμετωπίσουμε στη συνέχεια).

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, θεωρούμε περισσότερες από μια περιοχές συν/νων (μια βάση), με τη χρήση περισσότερων του ενός συστήματος συν/νων. Οι παράμετροι των διαφόρων αυτών συστημάτων συνδέονται με μια 1-1 μεταξύ τους απεικόνιση (άρα ορίζεται και η αντίστροφη απεικόνιση), η οποία είναι και διαφορίσιμη (**αμφιδιαφόριση**), ενώ οι περιοχές συν/νων που ορίζουν μπορούν να καλύψουν με την ένωσή τους όλη την επιφάνεια. Πράγματι:

Θεώρημα του μετασχηματισμού ή **της αλλαγής των παραμέτρων**

Ας είναι **P** *ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας* M *και*

$$\mathbf{x}: U\subset \mathbf{R}^2 \to M\subset \mathbf{R}^3 \ \textit{με}\ \mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$\bar{\mathbf{x}}: V\subset \mathbf{R}^2 \to M\subset \mathbf{R}^3 \ \textit{με}\ \bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})=(x(\bar{u},\bar{v}),y(\bar{u},\bar{v}),z(\bar{u},\bar{v})),$$

δύο συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι εικόνες αποτελούν περιοχές συν/νων γύρω από το $\mathbf{P}\in M$, *δηλαδή* $\mathbf{P}\in \mathbf{x}(U)\cap \bar{\mathbf{x}}(V)=W$. *Τότε η απεικόνιση*

$$\mathbf{h}=\mathbf{x}^{-1}\circ \bar{\mathbf{x}}:\ \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)\to \mathbf{x}^{-1}(W)$$

είναι αμφιδιαφόριση κλάσεως C^m $(m\geq 1)$.

Απόδειξη

Οι συνιστώσες συναρτήσεις της **h** είναι οι $u=u(\bar{u},\bar{v})$, $v=v(\bar{u},\bar{v})$, με $(\bar{u},\bar{v})\in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι οι u,v είναι κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ και ότι αντιστρέφονται, δηλαδή μπορούν να υπολογιστούν τα $\bar{u}=\bar{u}(u,v)$ και $\bar{v}=\bar{v}(u,v)$ και μάλιστα ότι αυτά είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσεως C^m $(m\geq 1)$.

■ Επειδή οι **x**, $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^{-1}$, $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$ είναι αμφισυνεχείς η σύνθεση $\mathbf{h}=\mathbf{x}^{-1}\circ\bar{\mathbf{x}}$ θα είναι μια συνάρτηση 1-1.

■ Έστω $\mathbf{r}\in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$. Τότε θα είναι $\mathbf{Q}=\mathbf{h}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q})$. Επειδή $\mathbf{x}(u,v)$ είναι ένα σύστημα συν/νων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det\dfrac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}(\mathbf{Q})\neq 0$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $\mathbf{F}: U\times \mathbf{R}\to \mathbf{R}^3$ με $\mathbf{F}(u,v,t)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)+t)$, $(u,v)\in U$ και $t\in \mathbf{R}$ (γεωμετρικά η **F** απεικονίζει ένα ορθό κύλινδρο με βάση U σε ένα ορθό κύλινδρο με βάση **x**(U) (σχήμα 2.3).

Η **F** είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ (x,y,z,t διαφορίσιμες) και η **x** είναι ο περιορισμός της **F** στο $U\times\{\mathbf{0}\}$.