Οι παραμετρικές παραστάσεις που εμείς θα θεωρούμε στη συνέχεια θα είναι κλάσης τουλάχιστον C^m, $m \geq 1$, ακόμη και αν αυτό δε συμβαίνει σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Ένα υποσύνολο $M \subset \mathbf{R}^3$ θα αποτελεί μια **κανονική επιφάνεια** αν για κάθε σημείο **P** της M υπάρχει ανοικτή περιοχή $V \subset \mathbf{R}^3$ και μια απεικόνιση:

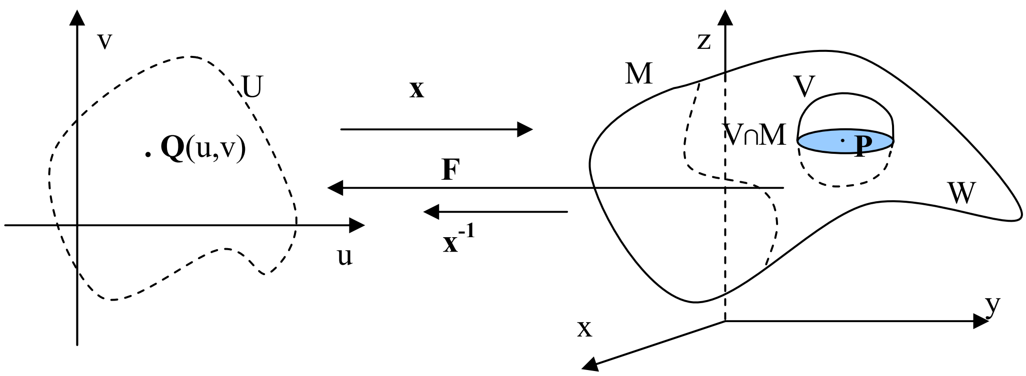
$$\mathbf{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \to V \cap M \subset \mathbf{R}^3 \text{ με } \mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

για την οποία να ισχύουν:

I) Η **x** είναι κλάσεως C^m ($m \geq 1$) (λεία απεικόνιση με συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης στο U).

II) Για κάθε σημείο $\mathbf{Q}=(u,v) \in U$ η **x** είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση (**συνθήκη κανονικότητας** ή **μη εκφυλισμού**).

III) Η **x** είναι **αμφισυνεχής (ομοιομορφισμός)**. Αυτό σημαίνει ότι η **x** είναι συνεχής στο U και υπάρχει η αντίστροφή της $\mathbf{x}^{-1}$, η οποία είναι επίσης συνεχής, στο $V \cap M$. Η $\mathbf{x}^{-1}$ είναι ένας περιορισμός της συνεχούς απεικόνισης $\mathbf{F}: W \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ η οποία είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο W που περιέχει το $V \cap M$ ($\mathbf{x}(U) \subset W$) (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1

Σημειώνουμε ότι: η απεικόνιση **x** με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **σύστημα (τοπικών) συντεταγμένων** ή **παραμέτρηση** γύρω από το σημείο **P** του $V \cap M$, το δε σύνολο $V \cap M$ λέγεται **περιοχή συντεταγμένων** γύρω από το **P**.

Στην πραγματικότητα μια κανονική επιφάνεια αποτελείται από τη M μαζί με την οικογένεια ***B*** (**βάση της M**) των περιοχών συν/νων που προκύπτουν από συστήματα συν/νων, κλάσεως C^m ($m \geq 1$) που ικανοποιούν τις συνθήκες:

■ Η εικόνα της ***B*** καλύπτει την M, δηλαδή για κάθε σημείο **P** υπάρχει σύστημα συν/νων της ***B*** που η εικόνα του περιέχει το **P**.

■ Κάθε σύστημα συν/νων της ***B*** έχει εικόνα που είναι τομή της M με ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

Παρατηρήσεις

☑ Με τον ορισμό της κανονικής επιφάνειας μπορούμε να μελετήσουμε τις **τοπικές ιδιότητες** των επιφανειών σε μια περιοχή ενός σημείου τους. Πράγματι, ένα σημείο **P** μιας επιφάνειας ανήκει στην εικόνα ενός συστήματος συν/νων και στα σημεία μιας περιοχής του σημείου **P** αντιστοιχούν οι συν/νες (x(u,v),y(u,v),z(u,v)), με βάση τις οποίες μελετάμε τις ιδιότητες της επιφάνειας.