στο σημείο της α(s) (εγγύτατος κύκλος). Έτσι, κατά μήκος μιας καμπύλης που η διεύθυνση της εφαπτομένης μεταβάλλεται γρήγορα, για παράδειγμα, περιφέρεια με μικρή ακτίνα, η καμπυλότητα είναι μεγάλη ή αλλιώς η ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρή.

Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο **α**(s) είναι κ(s)=0, τότε το σημείο αυτό καλείται σημείο καμπής και σε αυτό αντιστοιχεί άπειρη ακτίνα καμπυλότητας

Στην περίπτωση που σε κάθε σημείο **α**(s) είναι κ(s)=0, τότε η καμπύλη δεν καμπυλώνεται καθόλου άρα είναι μια ευθεία.

Ως ορισμό της καμπυλότητας θα μπορούσαμε να δώσουμε και τον παρακάτω, μια και ένας αντίστοιχος ορισμός θα μας απασχολήσει όταν αναφερθούμε σε καμπύλες που ανήκουν σε επιφάνειες.

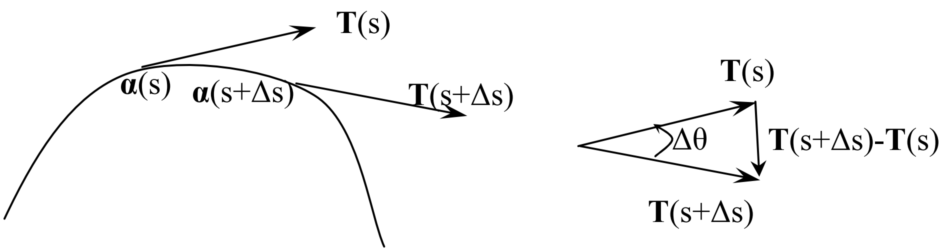
**Θεώρημα**

*Αν* **α**(s) *είναι μια φυσική παράσταση μιας καμπύλης* **α** *κλάσεως* $C^m$ $(m \geq 2)$ *και* Δθ *είναι η γωνία που σχηματίζουν τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα* **T**(s) *και* **T**(s+Δs) (Δs>0) *στα γειτονικά σημεία* **α**(s) *και* **α**(s+Δs) *αντίστοιχα της τροχιάς της, τότε:*

$$\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}.$$

**Απόδειξη**

Με το **T**(s) μοναδιαίο, το ||**T**(s+Δs)-**T**(s)|| εκφράζει το μήκος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές μήκους 1 (σχήμα 1.8).




Σχήμα 1.8

Άρα: $\|\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)\|=2\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)$ γιατί $\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)=\dfrac{\frac{\|\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)\|}{2}}{\|\mathbf{T}(s)\|}$.

Με χρήση του αναπτύγματος Taylor για το ημίτονο προκύπτει:

$2\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)=\Delta\theta+(\circ\Delta\theta)$, όπου $(\circ\Delta\theta)$ το σύμβολο Landau για το Δθ που δείχνει ότι το υπόλοιπο του αναπτύγματος είναι αμελητέο σε σχέση με το Δθ. Τότε:

$$\kappa(s)=\|\mathbf{T}'(s)\|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta+(\circ\Delta\theta)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}(1+\frac{\circ\Delta\theta}{\Delta\theta})\right|$$

και με $\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=0$ θα είναι και $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\circ\Delta\theta}{\Delta\theta}=0$ άρα: $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, η καμπυλότητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής, της διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης προς το μήκος τόξου και μάλιστα, η καμπυλότητα είναι μεγάλη κατά μήκος μιας καμπύλης που η διεύθυνση της