1.5 Προσανατολισμός καμπύλης

Έστω η καμπύλη $\mathbf{\alpha}$: $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$. Με τον ορισμό της καμπύλης ορίζεται αυτόματα πάνω σε αυτή μια φορά διαγραφής του ίχνους της μεταξύ του $\mathbf{\alpha}(\alpha)$ και του $\mathbf{\alpha}(\beta)$, καθώς το t πηγαίνει από το α στο β. Ορίζουμε δηλαδή έναν προσανατολισμό της εικόνας $\mathbf{\alpha}([\alpha,\beta])$ ή αλλιώς έναν **προσανατολισμό της καμπύλης**.

Αν ως θετική φορά διαγραφής χαρακτηριστεί η φορά από το $\mathbf{\alpha}(\alpha)$ μέχρι το $\mathbf{\alpha}(\beta)$ (καθώς το t πηγαίνει από το α στο β) τότε η φορά από το $\mathbf{\alpha}(\beta)$ μέχρι το $\mathbf{\alpha}(\alpha)$ θα χαρακτηριστεί ως **αντίθετη** της προηγούμενης. Για παράδειγμα, οι καμπύλες $\mathbf{\alpha}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ και $\mathbf{\beta}(t)=\mathbf{\alpha}(\alpha+\beta-t)$ έχουν αντίθετη φορά.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι, η παραμέτρηση μιας καμπύλης με παράμετρο του μήκος τόξου δεν είναι μοναδική, μια και εξαρτάται και από την εκλογή του αρχικού σημείου t_0 (που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου s=0) αλλά και από το πρόσημο του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{\alpha}'(u)\|du$, ανάλογα με τον αν είναι $t>t_0$ ή $t<t_0$. Άρα η παραμέτρηση μια καμπύλης εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης.

Ισχύει γενικότερα το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

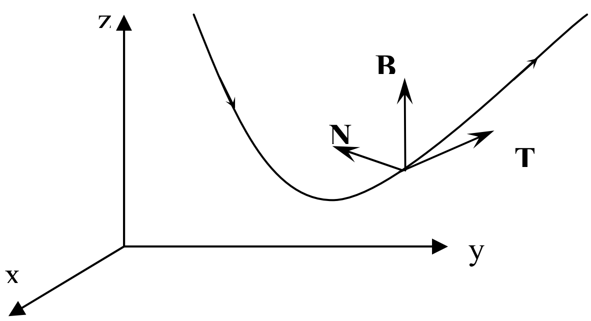
Αν $\mathbf{\alpha}=\mathbf{\alpha}(s)$ *είναι μια φυσική παράσταση της καμπύλης* $\mathbf{\alpha}$ *και* $\mathbf{\beta}(s^*)=\mathbf{\alpha}(s(s^*))$ *είναι μια άλλη φυσική παράσταση της καμπύλης* $\mathbf{\alpha}$*, τότε* $s=\pm s^*+c$, c *σταθερά.*

Απόδειξη

Αν $\mathbf{\alpha}(s)$, $\mathbf{\beta}(s^*)$ είναι δύο φυσικές παραστάσεις της καμπύλης $\mathbf{\alpha}$ (δηλαδή $\|\mathbf{\alpha}'(s)\|=1$, $\|\mathbf{\beta}'(s^*)\|=1$) τότε: $\mathbf{\beta}'(s^*)=\dfrac{d\mathbf{\alpha}(s(s^*))}{ds^*}=\dfrac{d\mathbf{\alpha}(s)}{ds}\cdot\dfrac{ds}{ds^*}$ και $\|\mathbf{\beta}'(s^*)\|=|\dfrac{d\mathbf{\alpha}(s)}{ds}|\cdot|\dfrac{ds}{ds^*}|$ $=\|\mathbf{\alpha}'(s)\|\cdot|\dfrac{ds}{ds^*}|$ άρα $|\dfrac{ds}{ds^*}|=1$ ή $ds=\pm ds^*$ και με ολοκλήρωση $s=\pm s^*+c$.

1.6 Πλαίσιο Serret-Frenet, Καμπυλότητα καμπύλης, Προσημασμένη καμπυλότητα, Στρέψη καμπύλης, Γωνία καμπυλών

Πλαίσιο Serret-Frenet ή **κινούμενο τρίεδρο**, καλούμε την τριάδα των μοναδιαίων και καθέτων μεταξύ τους διανυσμάτων $\{\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}\}$, τα οποία αποτελούν μια **δεξιόστροφη βάση** (φορά που προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού) σε κάθε σημείο μιας καμπύλης $\mathbf{\alpha}$, η μελέτη της οποίας δίνει κρίσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της καμπύλης (σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7