**(παράμετρο το) μήκος τόξου** ή **φυσική (ανα)παραμέτρηση** ή **φυσική παράσταση της (αρχικής) καμπύλης**, το δε s καλείται και **φυσική παράμετρος**.

Σημειώνουμε ότι, με τη φυσική αναπαραμέτρηση αποκτούμε **καμπύλες με μοναδιαία ταχύτητα** (διάνυσμα ταχύτητας με μέτρο ίσο με τη μονάδα) και επιτυγχάνουμε έτσι την απλοποίηση πολλών αποτελεσμάτων χωρίς βλάβη της γενικότητας της ισχύος τους.

**Θεώρημα**

*Αν* **α** *είναι μια λεία και κανονική καμπύλη τότε αυτή μπορεί να αναπαραμετριστεί ώστε να έχει μοναδιαία ταχύτητα.*

**Απόδειξη**

Θεωρούμε τη συνάρτηση μήκος τόξου: $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$, με $t_0<t$. Σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα έχουμε: $\frac{ds}{dt}=\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|>0$, άρα η συνάρτηση s(t) είναι γνησίως αύξουσα και επομένως θα αντιστρέφεται με αντίστροφη την t=t(s) οπότε: $\frac{dt(s)}{ds}=\frac{1}{\frac{ds(t(s))}{dt}}>0$.

Αν $\boldsymbol{\beta}(s)=\boldsymbol{\alpha}(t(s))$ είναι η αναπαραμέτρηση της **α** με την φυσική παράμετρο τότε:

$$\boldsymbol{\beta}'(s)=\boldsymbol{\alpha}'(t(s))\cdot t'(s)=\boldsymbol{\alpha}'(t(s))\cdot\frac{d(t(s))}{ds} \text{ και}$$

$$\|\boldsymbol{\beta}'(s)\|=\|\boldsymbol{\alpha}'(t(s))\|\cdot\left|\frac{d(t(s))}{ds}\right|=\left|\frac{d(s(t))}{dt}\right|\cdot\left|\frac{1}{\frac{d(s(t))}{dt}}\right|=1.$$

**Παρατηρήσεις**

☑ Για την καμπύλη **α**: $[t_0,t]\to\mathbf{R}^3$ με μοναδιαία ταχύτητα, το μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ των $t_0$ και t είναι ίσο με $L=L_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}1\,dt=t-t_0$ (και γενικότερα $|t-t_0|$, αν δε γνωρίζουμε την ακριβή ανισοτική σχέση μεταξύ $t_0$ και t) οπότε η συνάρτηση μήκους τόξου θα είναι η $s(t)=t-t_0$.

Θα λέμε τότε ότι η καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου s από $t_0$ έως t.

☑ Για την αναπαραμετρισμένη καμπύλη **β** με παράμετρο το μήκος τόξου s, το διάστημα ορισμού είναι το [0,L].

☑ Παρότι, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, όλες οι λείες και κανονικές καμπύλες μπορούν να αναπαραμετριστούν έτσι ώστε να έχουν μοναδιαία ταχύτητα, εντούτοις μπορεί να μην υπάρχει ένα τύπος με τον οποίο να υπολογίζεται η αντικατάσταση t=t(s), λόγω αδυναμίας υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που για καμπύλη θεωρηθεί η έλλειψη καταλήγουμε σε ένα μη υπολογιζόμενο (αναλυτικά) ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

☑ Κατά τη φυσική αναπαραμέτρηση βέβαια δεν αλλάζει η διεύθυνση του (εφαπτόμενου) διανύσματος ταχύτητας.