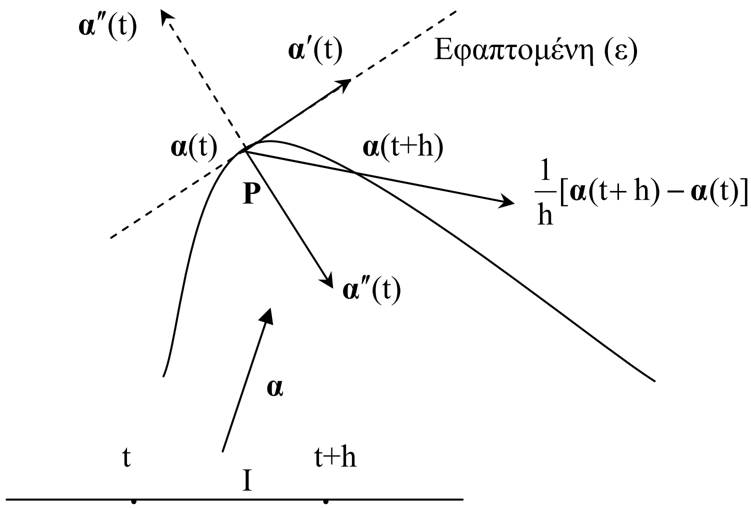
Για μια λεία καμπύλη κλάσεως (τουλάχιστον) C^2, το $\boldsymbol{\alpha}''(t_0)$ είναι η 2η παράγωγος της **α** στο t_0 και αποτελεί (γεωμετρικά) το **διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης α στο σημείο t_0**. Είναι δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}''(t_0) = ([\alpha^1(t)]''_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]''_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]''_{t=t_0})$$

Γενικότερα, το διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης σε οποιοδήποτε $t \in I \subset R$ θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}''(t)$ και το μέτρο του θα το ονομάζουμε **επιτάχυνση** ή **μέτρο της επιτάχυνσης** της **α** στο t και θα είναι ίσο με:

$$\|\boldsymbol{\alpha}''(t)\| = \sqrt{\left([\alpha^1(t)]''\right)^2 + \left([\alpha^2(t)]''\right)^2 + \left([\alpha^3(t)]''\right)^2}$$

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα δύο θεωρήματα που αφορούν τις καμπύλες και τα οποία θα έχουν ευρεία εφαρμογή στη συνέχεια (σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5

Θεώρημα

Το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ μιας λείας καμπύλης του $\mathbf{R}^3$, είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (στο ίχνος της) στο σημείο της $\boldsymbol{\alpha}(t)$.

Απόδειξη

Έστω η καμπύλη **α**: $I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ μια λεία καμπύλη με $t \in I$ και **P**=**α**(t) η εικόνα (σημείο) της **α** στο t και **Q**=**α**(t+h), $h \in I$, η εικόνα της **α** στο t+h. Έστω επίσης (ε) η ευθεία των **P**,**Q**. Τότε το διάνυσμα **PQ** είναι ίσο με **PQ**=**α**(t+h)-**α**(t) και η (ε) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα: $\frac{1}{h}[\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)] = \frac{\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)}{h}$.

$$\text{Για } h \to 0 \text{ είναι: } \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)}{h} = \boldsymbol{\alpha}'(t)$$

και η (ε) παίρνει τη θέση της εφαπτομένης της καμπύλης στο **P**. Άρα το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (στο ίχνος της) στο σημείο της **α**(t).

Θεώρημα

*Αν η καμπύλη **α**(t) έχει σταθερή ταχύτητα για κάθε $t \in I \subset R$ ($\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$=σταθ.) τότε το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''(t)$.*