Σημειώνουμε ότι, στην περίπτωση που είναι x^1=x και x^2=y τότε τα παραπάνω δίνουν τις μερικές παραγώγους: $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$ (μικτές παράγωγοι), $\mathbf{f}_{x^2}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{y^2}(\mathbf{a})$.

Παρατήρηση

Γενικά, οι $\mathbf{f}_{x^i x^j}(\mathbf{a})$, για $i \neq j$ αλλά και ειδικότερα οι $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$ δεν είναι ίσες μεταξύ τους, σύμφωνα όμως με το **θεώρημα Schwarz**, θα είναι ίσες μεταξύ τους στο **a** όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\mathbf{f}_x(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_y(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$ και είναι συνεχείς σε μια περιοχή U του σημείου **a**.

Στην περίπτωση αυτή θα είναι: $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$.

Στην πράξη, απαιτούμε γενικά οι συναρτήσεις μας **f**: $I \to \mathbf{R}^k$ να έχουν παραγώγους τουλάχιστον 1ης τάξης ενώ συχνά επίσης απαιτούμε να έχουν παραγώγους 2ης ή ανώτερης τάξης. Θα λέμε τότε ότι: μια διανυσματική (ή πραγματική συνάρτηση) **f** είναι **κλάσεως $\mathbf{C^m}$** ή **διαφορίσιμη τάξεως $\mathbf{C^m}$** $(m \geq 1)$ σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ αν υπάρχει η παράγωγός της τάξεως m και είναι συνεχής στο I. Προφανώς, μια συνάρτηση που είναι κλάσεως C^κ θα είναι και κλάσεως C^λ, με $\lambda \leq \kappa$.

Συμβολίζουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων με C^0, ενώ την κλάση των συναρτήσεων που έχουν παραγώγους όλων των τάξεων με C^∞.

Πρόταση

Αν οι συναρτήσεις **f,g**: $I \to \mathbf{R}^k$ *είναι κλάσεως* C^m *στο* I*, τότε οι συναρτήσεις* **f+g, f-g, fg** *καθώς και η σύνθεση* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *είναι συναρτήσεις κλάσεως* C^m.

Στην περίπτωση μιας καμπύλης του $\mathbf{R}^3$, που αποτελεί μια απεικόνιση $I \to \mathbf{R}^3$, θα λέμε ότι αυτή είναι **διαφορίσιμη** ή **λεία στο R** (στο $I \subset \mathbf{R}$), αν οι συνιστώσες της α^i (i=1,2,3) είναι παραγωγίσιμες (διαφορίσιμες) συναρτήσεις οποιασδήποτε τάξης στο **R** και μάλιστα οι παράγωγοί τους είναι συναρτήσεις συνεχείς στο **R**. Η **α** είναι τότε μια **λεία καμπύλη κλάσεως $\mathbf{C}^\infty$** ή απλά **λεία καμπύλη**.

Το διαφορικό της **α** στο t_0 είναι τότε το:

$$d_{t_0}\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\theta\alpha^1(t_0)}{\theta t}, \frac{\theta\alpha^2(t_0)}{\theta t}, \frac{\theta\alpha^3(t_0)}{\theta t}\right) = \left(\frac{d\alpha^1(t_0)}{dt}, \frac{d\alpha^2(t_0)}{dt}, \frac{d\alpha^3(t_0)}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

$$= ([\alpha^1(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]'_{t=t_0}) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0) \text{ και } (d_{t_0}\boldsymbol{\alpha})(h) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0)\cdot h.$$

Για μια λεία καμπύλη κλάσεως (τουλάχιστον) C^1, η $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ είναι η 1η παράγωγος της **α** στο t_0 και αποτελεί (γεωμετρικά) το **διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης α στο σημείο $\mathbf{t_0}$**. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t_0) = \lim_{t \to t_0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_0 + h) - \boldsymbol{\alpha}(t_0)}{h} = ([\alpha^1(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]'_{t=t_0})$$

Γενικότερα, το διάνυσμα ταχύτητας μιας (λείας) καμπύλης σε οποιοδήποτε $t \in I \subset R$ θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ και το μέτρο του θα το ονομάζουμε **ταχύτητα** ή **μέτρο της ταχύτητας** της **α** στο t και θα είναι ίσο με:

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{\left[\frac{d\alpha^1(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d\alpha^2(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d\alpha^3(t)}{dt}\right]^2} = \sqrt{\left([\alpha^1(t)]'\right)^2 + \left([\alpha^2(t)]'\right)^2 + \left([\alpha^3(t)]'\right)^2}$$