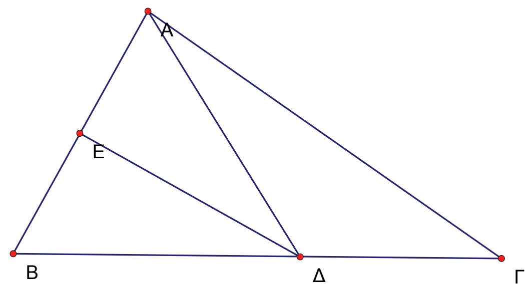
Με εφαρμογή των δύο παραπάνω βλέπουμε ότι αν οι δύο μεσοκάθετοι είναι ασυμπτωτικά παράλληλες τότε και η τρίτη είναι ασυμπτωτικά παράλληλη προς αυτές. Επιπλέον θα αποδείξουμε ότι και οι τρείς είναι ασυμπτωτικά παράλληλες στην διεύθυνση Ω. Αυτό θα γίνει στα δύο παρακάτω βήματα:



Βήμα 1. Οι τρείς μεσοκάθετοι τέμνουν την μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου (η ισότητα στις πλευρές επιτρέπεται). Πράγματι αν ΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά τότε $\measuredangle A \geq \measuredangle B$, $\measuredangle A \geq \measuredangle \Gamma$.

Έτσι υπάρχει σημείο Δ στη ΒΓ ώστε $\measuredangle B = \measuredangle B A \Delta$. Τότε η κάθετος ΔΕ στην ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΑΒΓ . Όμοια και για τη μεσοκάθετο στην ΑΓ.

Βήμα 2. Σε ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο καμιά ευθεία δεν τέμνει και τις τρείς πλευρές. Αν υποθέσουμε ότι μια ευθεία t τέμνει τις δύο πλευρές l,m στα Γ, Δ η ημιευθεία ΔΓ κείται μεταξύ των ασυμπτωτικά παραλλήλων στην l, $\Delta\Omega_1$ και $\Delta\Omega_2$ Το $\Delta\Omega_3$ είναι μια άλλη ημιευθεία που είναι οριακά παράλληλη στην n και αντίθετο στην $\Delta\Omega_2$. Έτσι η $\Delta\Omega_1$ βρίσκεται μεταξύ των ΔΓ και $\Delta\Omega_3$. Έτσι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ δεν τέμνει την n.

Όμοια και η $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δεν τέμνει την n.

1.4 Μοντέλα στο υπερβολικό επίπεδο – αντιστροφή

Στο προηγούμενο εισάγουμε την υπερβολική γεωμετρία και αναφέρουμε μερικά συμπεράσματα αυτής, που φαίνονται πολύ παράξενα σε κάποιον που έχει συνηθίσει στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Ακόμα και αν υποθέσει κάποιος ότι όλα αυτά αποδεικνύονται μαθηματικά σωστά, υπάρχει η αίσθηση ότι η βασική παραδοχή, δηλαδή το υπερβολικό αξίωμα, είναι λάθος. Αν αυτό ήταν κάποιο φυσικό φαινόμενο θα μπορούσαμε να κάνουμε μια σειρά παρατηρήσεις ή πειράματα που να αποδεικνύουν ή απορρίπτουν την ισχύ του. Όμως στα μαθηματικά θα μπορούσαμε άραγε να φέρουμε άπειρα επεκτάσιμες ευθείες και να παρατηρήσουμε αν αυτές είναι παράλληλες ή όχι; Και αν ακόμα υποτεθεί ότι αυτό μπορεί να γίνει, το βασικό μας ερώτημα παραμένει, γιατί δεν γνωρίζουμε και δεν έχει σημασία στα μαθηματικά η φύση της ευθείας ή του οποιοδήποτε αντικειμένου. Αυτό που έχει μαθηματική αξία είναι οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Άρα μπορούμε να προσπεράσουμε την άποψη του Kant και να *επινοήσουμε* ένα δημιούργημα όπου το υπερβολικό αξίωμα ισχύει. Μιλώντας πιο τεχνικά το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει ένα μοντέλο που να ισχύει το υπερβολικό αξίωμα. Η απάντηση σε αυτό είναι ναι και υπάρχουν