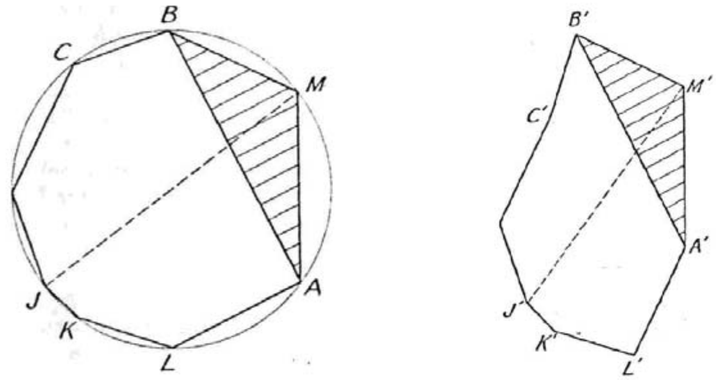
$(AMBC\ldots KL)-(AMB)>(A'M'B'C'\ldots K'L')-(A'M'B')\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (ABC\ldots KL)>(A'B'C'\ldots K'L')$.



(2.3.4.c)

Παρακάτω επιχειρούμε να δώσουμε μια απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος που διατυπώσαμε στην αρχή της παραγράφου 2.3, την απόδειξη του οποίου αναβάλαμε για αργότερα.

2.3.5. Το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα:

Δοθείσας οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης C_1, η οποία δεν είναι κύκλος, υπάρχει άλλη καμπύλη C_2, με το ίδιο μήκος η οποία εσωκλείει μεγαλύτερο εμβαδόν. Επομένως εάν υπάρχει μια απλή κλειστή καμπύλη με σταθερό μήκος η οποία εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν, αυτή είναι ο κύκλος.

Απόδειξη (μέθοδος του Jacob Steiner):

Θεωρούμε k το μήκος της καμπύλης C_1 (σχήμα 2.3.5.a). Έστω P σημείο της καμπύλης και Q το σημείο που βρίσκεται στα μισά της περιμέτρου της. Έτσι το τόξο $\overset{\frown}{PQ}$ έχει μήκος $\frac{k}{2}$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι το ευθύγραμμο τμήμα PQ χωρίζει ολόκληρο το εμβαδόν σε δύο άνισα μέρη. Τότε αφαιρούμε το μέρος με το μικρότερο εμβαδόν και το αντικαθιστούμε με την εικόνα του μεγαλύτερου (ως προς το ευθύγραμμο τμήμα PQ) έτσι ώστε να δημιουργήσουμε μια περιοχή περιορισμένη από μια καμπύλη C_2 μήκους k, με μεγαλύτερο εμβαδόν από την περιοχή που περιορίζεται από την καμπύλη C_1.