ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Αν $\alpha^2 = 2(2\ N + 1)\ \beta^2$ τότε α, β ασύμμετρα, δηλαδή

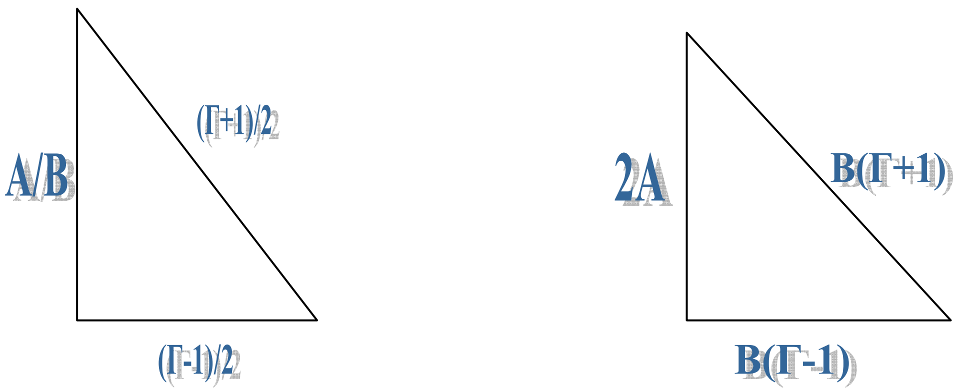
$\sqrt{2(2N+1)}$ **άρρητοι για Ν = 1, 2,… (& άρα** $\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{14}$ **άρρητοι)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Υποθέτουμε ότι Α/Β = $\sqrt{2(2N+1)}$ **ρητός, δηλαδή α, β σύμμετρα (σε ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους).** Θέτω Γ=2(2Ν+1).

Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι οι εξής:



Αν Β είναι άρτιος τότε η υποτείνουσα του ορθ. Τριγώνου Β(Γ+1) αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό. Από την Πρόταση Α συνεπάγεται ότι οι πλευρές 2Α, Β(Γ-1), Β(Γ+1) αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό. Τότε όμως προκύπτει ότι τα Α, Β είναι άρτια το οποίο είναι άτοπο γιατί θεωρήσαμε ως δεδομένο ότι βρίσκονται κατά ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους.

Αν Β είναι περιττός τότε 2Α διαιρείται με το 4 ή Α διαιρείται με το 2 –δηλαδή Α άρτιος, οπότε Α = 2Δ. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ως άνω τρίγωνο έχουμε