

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

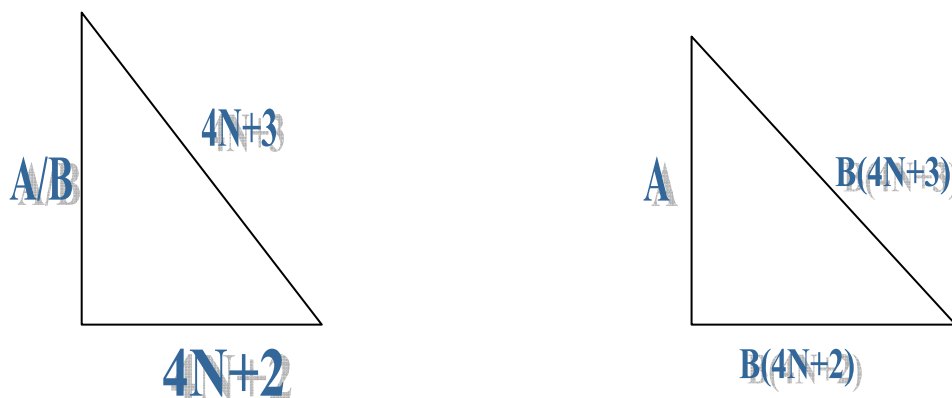
Αν $a^2 = (8N + 5) \beta^2$ τότε a, β ασύμμετρα, δηλαδή

$\sqrt{8N+5}$ άρρητοι για $N = 0, 1, 2, \dots$ (& άρα $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ άρρητοι)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Υποθέτουμε ότι $A/B = \sqrt{8N+5}$ ρητός, δηλαδή a, β σύμμετρα (σε ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους). Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι οι εξής:



Αν B είναι άρτιος τότε η υποτείνουσα του ορθ. Τριγώνου $B(4N+3)$ αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό. Από την Πρόταση A συνεπάγεται ότι οι πλευρές $A, B(4N+2)$ αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό. Τότε όμως προκύπτει ότι τα A, B είναι άρτια το οποίο είναι άτοπο γιατί θεωρήσαμε ως δεδομένο ότι βρίσκονται κατά ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους.

Αν B είναι περιττός τότε A είναι άρτιος και $B(4N+2)$ διαιρείται με το 4 ή $4N+2$ διαιρείται με το 4 –αφού B περιττός- ή $2N+1$ διαιρείται με το 2, το οποίο είναι αδύνατο.

Συνεπώς δεν ισχύει το αρχικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αριθμός που μετράει και το A και το B . Άρα τα A, B είναι ασύμμετρα ή οι αριθμοί $\sqrt{8N+5}$ είναι άρρητοι για $N = 0, 1, 2, \dots$, & άρα $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ άρρητοι.