

απόψεων των Gray & Tall με τους Lakoff & Núñez. Οι πρώτοι υποστηρίζουν ότι ο αριθμός αποτελεί ένα σύμβολο της Αριθμητικής και επομένως δεν είναι πλέον το *ενσαρκωμένο* αντικείμενο από το οποίο ενδεχομένως να προέρχεται ενώ οι δεύτεροι υποστηρίζουν ότι όλα τα Μαθηματικά και επομένως και οι αριθμοί είναι *ενσαρκωμένα* με την έννοια που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Βέβαια όπως θα περιγράψουμε και παρακάτω πολλές φορές η πορεία της ενσαρκωμένης προσέγγισης είναι παράλληλη με αυτή της συμβολικής (με χρήση *διεργασιών-εννοιών*) και υπάρχουν δεσμοί μεταξύ τους οι οποίοι θα μπορούσαν να ερμηνευτούν μέσω των *εννοιολογικών μεταφορών*.

2.4. Σχέση μεταξύ ενσαρκωμένων αντικειμένων, διεργασιών-εννοιών και ενθυλάκωσης διεργασιών

Σύμφωνα με τους Gray & Tall (2001), υπάρχει η παρακάτω διάκριση σχετικά με τους τύπους των Μαθηματικών εννοιών:

- *Ενσαρκωμένα αντικείμενα*, όπως στη γεωμετρία και στα γραφήματα, τα οποία έχουν ως αφητηρία τις φυσικές τους βάσεις και εξελίσσονται στην ανάπτυξη νοητικών εικόνων με τη βοήθεια της ιεραρχημένης χρήσης της γλώσσας.
- *Συμβολικές έννοιες* οι οποίες λειτουργούν στο συνεχές πέρασμα από την «προς διαχείριση νοητική έννοια» στην συχνά ασυνείδητη «προς εκτέλεση διεργασία».
- *Αξιοματικές έννοιες* στη προχωρημένη μαθηματική σκέψη όπου τα αξιώματα λεκτικά και συμβολικά χρησιμοποιούνται για τη λογική δόμηση της θεωρίας.
- *Ενθυλακωμένες διεργασίες*, πρόκειται για διεργασίες που έχουν *ενθυλακωθεί* σε μία αυτόνομη οντότητα. Η περίπτωση αυτή μπαίνει επιπροσθέτως στις προηγούμενες για να διαχωρίσει τα *ενσαρκωμένα* αντικείμενα από τις *ενθυλακωμένες διεργασίες*. (Gray & Tall, 2001)

Το άτομο ενεργεί αρχικά πάνω στα φυσικά αντικείμενα και στη συνέχεια πάνω στα *ενσαρκωμένα* αντικείμενα. Στη θεωρία APOS που περιγράψαμε παραπάνω οι ενέργειες πάνω στα φυσικά αντικείμενα *εσωτερικεύονται* σε διεργασίες και αυτές με τη σειρά τους *ενθυλακώνονται* σε νοητικά αντικείμενα. Στο σημείο αυτό διαφαίνεται και η διαφοροποίηση των απόψεων των Gray & Tall σε σχέση με αυτές της θεωρίας APOS (Czarnocha κ.ά., 1999) και της υποστασιοποίησης (Sfard, 1991) σχετικά με τη μετάβαση από τη διεργασία στο αντικείμενο. Σύμφωνα με τον Tall τα *ενθυλακωμένα* αντικείμενα