

Οι Bradley- Sandifer στην σελ. 27 σχολιάζουν ότι η απόδειξη είναι κατά κάποιο τρόπο ανεπαρκής εφόσον στηρίζεται στην υπόθεση ότι η $\sin x$ είναι συνεχής στο μηδέν και η $\cos x$ είναι φραγμένη.

Ο Σ. Γ. Παπασταυρίδης σχολιάζει ότι αυτή η εκτίμηση ίσως δεν είναι ορθή, για τους παρακάτω λόγους. Κατ' αρχάς είναι πασίγνωστο ότι το $\cos x$ φράσσεται απολύτως από το 1. Περαιτέρω δεν είναι αναγκαίο να υποθέσει συνέχεια της συνάρτησης $\sin x$ στο 0. Μπορεί να χρησιμοποιήσει την γεωμετρικά εύλογη ανισότητα $|\sin a| \leq |a|$. Ασφαλώς δεν δίνει τέτοιες λεπτομέρειες, όμως σίγουρα αυτές οι σκέψεις είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων του.

Ο σύγχρονος ορισμός συνεχούς συνάρτησης κατά σημείο είναι :

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Γενικά το δ στον ορισμό αυτό εξαρτάται από το ε και το x_0 .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο X αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

(Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας 1999, Σελ.139)

Ο σύγχρονος ορισμός ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης είναι :

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999, Σελ.156)

2.2 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ κατά CAUCHY

Στην συνέχεια προχωρεί φυσιολογικά να ορίσει την συνέχεια πραγματικής συνάρτησης πολλών πραγματικών μεταβλητών.

Κατ' ουσία ορίζει μία πραγματική συνάρτηση πολλών πραγματικών μεταβλητών ως συνεχή, όταν είναι συνεχής σε κάθε μία μεταβλητή ξεχωριστά. Ξεκινώντας λοιπόν τον «ορισμό» αυτό προχωρεί να αποδείξει ως «θεώρημα» πλέον (σε σημερινή ορολογία) ότι αν η f είναι «συνεχής κατά Cauchy» τότε $\lim f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ όταν $\lim x_1 = a_1$, $\lim x_2 = a_2$, $\lim x_n = a_n$, .

Εδώ υπάρχει πρόβλημα.