αρχικών στροφών, δηλαδή rot_{O,θ_1} o $rot_{O,\theta_2} = rot_{O,\theta_1+\theta_2}$. Έχει μείνει ανοιχτό το ερώτημα για το τι συμβαίνει όταν έχουμε και διαφορετικά κέντρα.

Έστω λοιπόν οι στροφές rot_{A,θ_1} και rot_{B,θ_2}. Ορίζουμε την ευθεία ℓ των Α, Β. Γνωρίζουμε ότι κάθε στροφή είναι προϊόν δύο ανακλάσεων. Έστω οπότε ευθεία ℓ_1 ώστε $\angle(\ell,\ell_1) = \frac{\theta_1}{2}$ και ευθεία ℓ_2 ώστε $\angle(\ell,\ell_2) = \frac{\theta_2}{2}$. Τότε έχουμε αντίστοιχα $rot_{A,\theta_1} = refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell}$ και $rot_{B,\theta_2} = refl_{\ell}$ o $refl_{\ell_2}$. Συνεπώς rot_{A,θ_1} o $rot_{B,\theta_2} = refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell}$ o $refl_{\ell}$ o $refl_{\ell_2}$ = $refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell_2}$. Απ' την προηγούμενη παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι

α) αν $\ell_1 // \ell_2$ τότε το προϊόν της rot_{A,θ_1} o rot_{B,θ_2} είναι μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{v} = 2\overrightarrow{BA}$, όπου $d(\ell_1,\ell_2) = \frac{|\vec{v}|}{2} = |\overrightarrow{AB}|$, ενώ

β) αν ℓ_1, ℓ_2 τέμνονται, τότε το προϊόν της rot_{A,θ_1} o rot_{B,θ_2} είναι στροφή με κέντρο το σημείο τομής των ℓ_1, ℓ_2 και γωνία διπλάσια της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες.

- Έστω ευθείες ℓ_1, ℓ_2 με $\ell_1 \perp \ell_2$. Τότε $refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell_2} = rot_{A,\pi}$, όπου Α το σημείο τομής των ℓ_1, ℓ_2.

  <u>Απόδειξη:</u>

  Αφού οι ευθείες μου δεν είναι παράλληλες, τότε το προϊόν των δύο ανακλάσεων ως προς αυτές τις ευθείες θα είναι στροφή με κέντρο Α το σημείο τομής των ℓ_1, ℓ_2 και γωνία διπλάσια της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο ευθείες, άρα $\theta = 2\frac{\pi}{2} = \pi$. Συνεπώς πρόκειται για την $rot_{A,\pi}$, δηλαδή για κεντρική συμμετρία (κέντρου Α).

- Η σύνθεση ανακλάσεων ως προς κάθετες ευθείες είναι αντιμεταθετική.

  <u>Απόδειξη:</u>

  Έστω ℓ_1, ℓ_2 με $\ell_1 \perp \ell_2$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell_2} = rot_{A,\pi}$, όπου Α το σημείο τομής των ℓ_1, ℓ_2. Αν είχαμε $refl_{\ell_2}$ o $refl_{\ell_1}$, τότε η στροφή που θα προέκυπτε θα είχε κέντρο το σημείο τομής των ευθειών, άρα το Α, και γωνία ίση με 2π-π=π. Επομένως ισχύει $refl_{\ell_2}$ o $refl_{\ell_1} = rot_{A,\pi} = refl_{\ell_1}$ o $refl_{\ell_2}$.

- Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

  1) Οι ανακλάσεις και κάθε προϊόν αυτών αποτελούν υποομάδα G_1 της ομάδας των μετασχηματισμών του επιπέδου.

  2) Οι στροφές και οι μεταφορές αποτελούν υποομάδα G_2 της G_1.