

μία μακρόχρονη διαδικασία, που αποτελείται από τρεις φάσεις. Στο ίδιο άρθρο (Sfard, 1991, p16), αναφέρει ότι το μοντέλο αυτό έχει ισχύ ακόμα και όταν γίνεται αναφορά στην ατομική μάθηση. Υπάρχει μία διαδικασία που διενεργείται στα οικεία αντικείμενα, η οποία ακολουθείται από την ιδέα μετατροπής αυτής της διαδικασίας σε αυτόνομη οντότητα. Τελικά, αποκτάται η ικανότητα αναγνώρισης αυτής της οντότητας ως μία ακέραια ολότητα. Αυτά τα τρία στάδια στην ανάπτυξη της έννοιας καλούνται εσωτερικευση (*interiorization*), συμπύκνωση (*condensation*) και πραγμάτωση (*reification*), αντίστοιχα.

Στο στάδιο της *εσωτερικευσης* (*interiorization*), ο μαθητευόμενος εξοικειώνεται με τη διαδικασία που τελικά θα βοηθήσει στην ανάπτυξη μίας νέας έννοιας (όπως το μέτρημα που οδηγεί στους φυσικούς αριθμούς, όπως οι αλγεβρικοί χειρισμοί που οδηγούν στις συναρτήσεις). Αυτές οι διαδικασίες είναι λειτουργίες που πραγματοποιούνται σε κατώτερου επιπέδου μαθηματικά αντικείμενα. Σταδιακά, ο μαθητευόμενος, εξοικειώνεται με αυτή τη διαδικασία και γίνεται ολοένα και πιο ικανός να σκέφτεται μία δοθείσα διαδικασία ως ολότητα, χωρίς να νιώθει την ανάγκη να καταφεύγει σε λεπτομέρειες, περνώντας έτσι στη φάση της *συμπύκνωσης* (*condensation*). Αυτή διαρκεί όσο μία νέα οντότητα παραμένει στενά συνδεδεμένη με κάποια διαδικασία. Μόνο όταν το άτομο αποκτά την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την έννοια ως ένα ολοκληρωμένο αντικείμενο, μπορούμε να πούμε ότι η έννοια έχει πραγματωθεί. Η *πραγμάτωση* (*reification*), επομένως, ορίζεται ως ένα ποιοτικό άλμα σε μία σταθερή δομή, η ξαφνική ικανότητα αντίληψης μίας έννοιας ως κάτι οικείο. Η νέα οντότητα σύντομα αποκολλάται από τη διαδικασία που παράγεται και πλέον αποκτά νόημα ως μέλος μίας κατηγορίας.

Ανάλογα και ο Dubinsky (1991) περιγράφει το μετασχηματισμό της δράσης σε γενικευμένο αντικείμενο ως μέρος της θεωρίας APOS (Δράση- Διαδικασία- Αντικείμενο- Σχήμα) στην οποία οι ενέργειες εσωτερικεύονται σε διαδικασίες, και τότε θεωρούνται ως αντικείμενα μέσα σε ένα ευρύτερο σχήμα (Dubinsky, 1991). Μία λεπτομερής εξέταση των δύο θεωριών αποκαλύπτει τις ομοιότητες αυτών. Αρχίζουν με ενέργειες πάνω σε γνωστά αντικείμενα (τα οποία μπορεί να είναι υλικά ή νοητικά) που επαναλαμβάνονται με στόχο τη *μετατροπή τους σε οικείες διαδικασίες* (βήμα-βήμα διαδικασίες ρουτίνας), θεωρούνται στο σύνολό τους ως διεργασίες, και στη συνέχεια γίνονται αντιληπτές ως οντότητες αυτοτελείς που μπορούν να