

3.4.4 Φάση IV: Το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Στην τελευταία φάση της παρέμβασης, δόθηκε στους φοιτητές το εξής πρόβλημα πλαισίου (context problem) (λχ Gravemeijer, K. and Doorman, D., 1999) :

‘Μια κωνική δεξαμενή έχει διάμετρο βάσης H m και ύψος H m . είναι ανεστραμμένη και γεμίζει με νερό σε σταθερό ρυθμό. Εστιάζουμε στο πρόβλημα τη χρονική στιγμή που η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος h m (ως μονάδα μέτρησης των διαστάσεων θεωρούμε το μέτρο m).’

Για τις ανάγκες της έρευνας είχε κατασκευαστεί μια αναπαράσταση του προβλήματος στο GeoGebra και ζητούνταν από τους φοιτητές να εκφράσουν τον όγκο του νερού ως μια συνάρτηση του ύψους του.

Ο στόχος εδώ ήταν να χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες φάσεις για την επίλυση του προβλήματος και κάπως έτσι να ξεκινήσουμε μια συζήτηση γύρω από το ΘΘΟΛ. Αυτό θα γινόταν ως εξής: θα κατασκευάζαμε μια συνάρτηση $f(x)$ που δίνει το εμβαδό της επιφάνειας του νερού ως συνάρτηση του ύψους του από τη βάση της δεξαμενής, έπειτα από το γράφημα αυτής, θα κατασκευάζαμε μια νέα συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, η οποία θα μας έδινε τον όγκο (συσσώρευση) του νερού ως συνάρτηση του ύψους. Τέλος θα κατασκευάζαμε τη $Dg(x) = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ και μέσα από το γράφημα της θα βλέπαμε, προσεγγιστικά, πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του. Τα γραφήματα των συναρτήσεων $Dg(x)$ και $f(x)$ είναι πανομοιότυπα για αρκούντως μικρό Δx . Η καταλυτική ερώτηση θα ήταν ‘Γιατί τα δύο γραφήματα είναι ακριβώς τα ίδια; Υπάρχει κάποιος λόγος για αυτό ή θα λέγατε ότι είναι απλώς μια σύμπτωση;’

Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκε το ακόλουθο φύλλο εργασίας: